LES VECTEURS : L'ESSENTIEL

1. Un vecteur est un « objet » qui possède une magnitude et une direction

En Mathématiques, en Sciences Physiques, en Sciences de l'Ingénieur etc…, on rencontre principalement (à notre niveau) deux types d'objets mathématiques pour d'écrire les grandeurs physiques : les ***scalaires*** et les ***vecteurs***.
– Un ***scalaire*** est une quantité qui est déterminée par sa **magnitude** (on dit aussi **norme**, **intensité**…). Le temps, l'énergie, l'entropie, la tension, la concentration etc… sont des grandeurs physiques décrites par une seule valeur numérique, c'est à dire un nombre réel.
– Un ***vecteur*** est une quantité qui est déterminée par sa ***magnitude*** (ou ***norme***) et par sa ***direction***. Une force, une quantité de mouvement, une vitesse, une accélération, un moment cinétique etc… sont des grandeurs physiques décrites par des vecteurs.

Vous apprendrez surement que toutes les grandeurs physiques peuvent être décrites par un objet mathématique nommé un ***tenseur*** dont les scalaires et les vecteurs sont des cas particuliers (un scalaire est un tenseur de rang 0 et un vecteur un tenseur de rang 1).

On représente un vecteur par une lettre avec un flèche ($\vec{A}$) mais aussi par une lettre en gras (***A***) surtout dans les livres.

- ***Egalité des vecteurs***

Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont identiques $\left(\vec{A}=\vec{B}\right)$ s'ils ont la même norme et la même direction.

Un vecteur peut être translaté parallèlement à lui même de façon arbitraire sans être modifié.

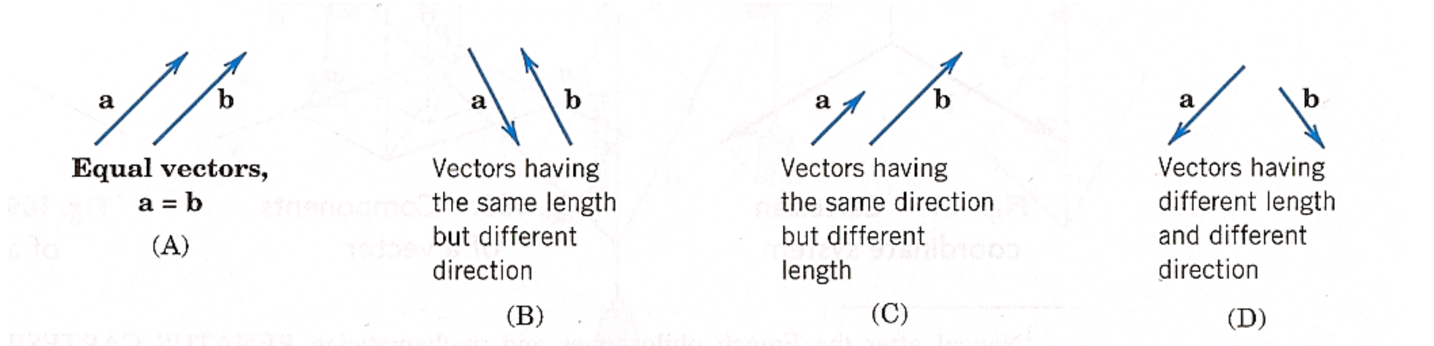


Fig. 166. (A) Equal vectors. (B)–(D) Different vectors

- ***Addition des vecteurs***

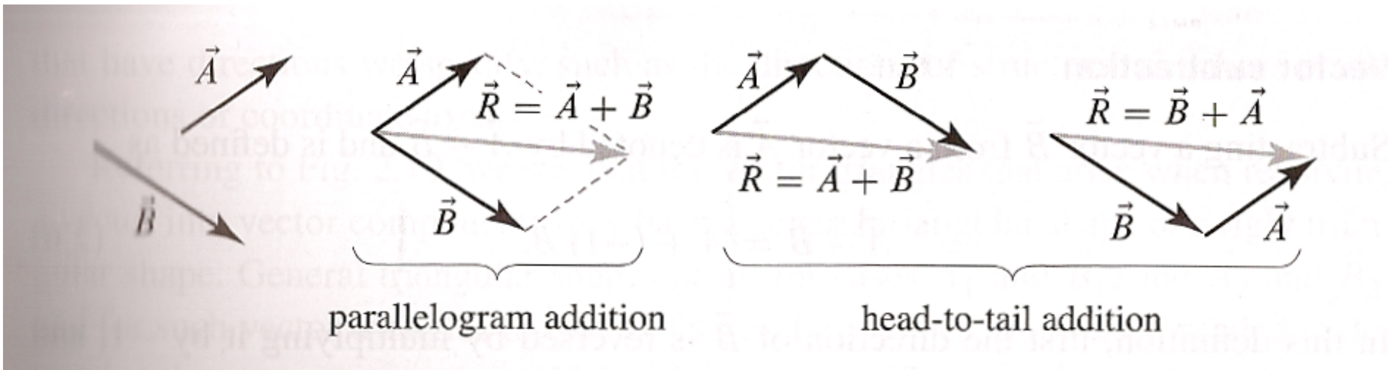


Figure 2.5. Addition of two vectors using the parallelogram method and the head-to-tail method.

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \quad \text{commutativité de l'addition}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C} \quad \text{Associativité de l'addition}$$

- ***<u>Soustraction des vecteurs</u>***

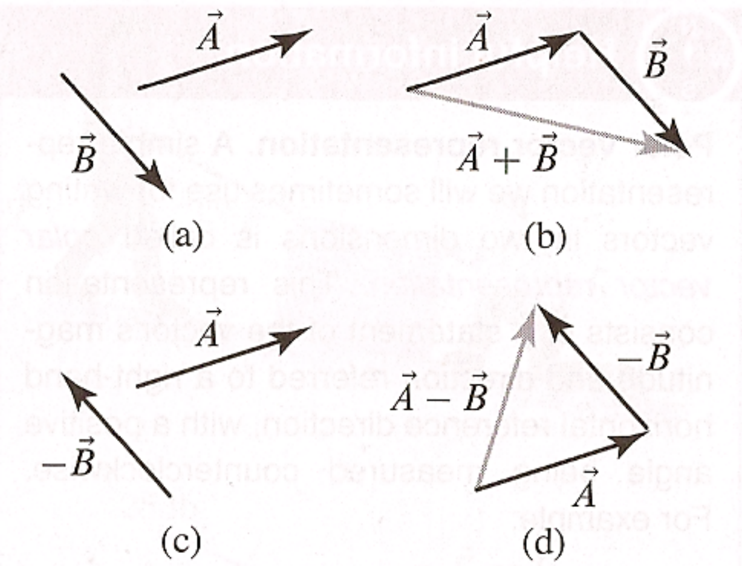


Figure 2.7
Comparison of addition and subtraction of two vectors. (a) Vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are defined. (b) $\vec{A}+\vec{B}$ is evaluated using the head-to-tail method. (c) The direction of $\vec{B}$ is reversed by multiplying it by -1. (d) $\vec{A}-\vec{B}$ is evaluated using the head-to-tail method.

- ***<u>Multiplication d'un vecteur par un scalaire</u>***

$$s\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=s\vec{A}+s\vec{B} \quad \text{distributivité par rapport à l'addition des vecteurs}$$

$$\left(s+t\right)\vec{A}=s\vec{A}+t\vec{B} \quad \text{distributivité par rapport à l'addition des scalaires}$$

$$\left(st\right)\vec{A}=s\left(t\vec{A}\right) \quad \text{associativité par rapport à la multiplication d'un scalaire}$$

2. Représentation d'un vecteur en coordonnées cartésiennes

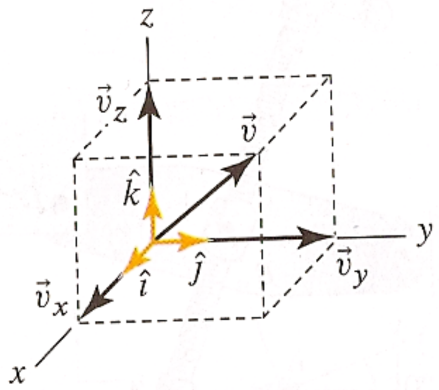


Figure 2.18
Right-hand Cartesian coordinate system with unit vectors $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, and $\hat{k}$ in the x, y, and z directions, respectively, and resolution of a vector $\vec{v}$ into vector components $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$, and $\vec{v}_z$.

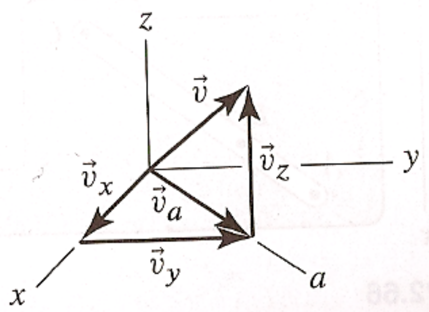


Figure 2.19
Evaluation of a vector's magnitude in terms of its components.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$
$$v \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{(norme d'un vecteur)}$$

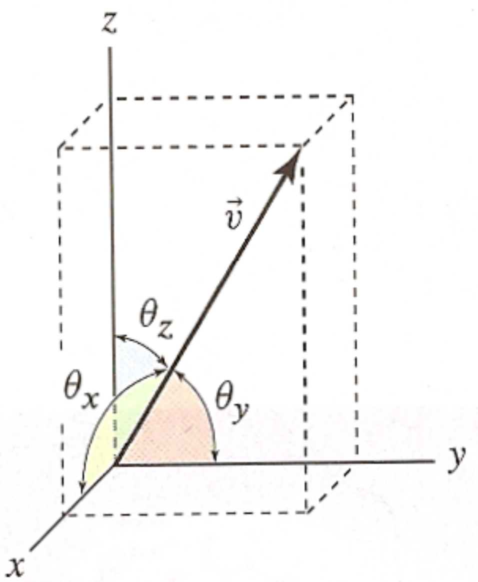


Figure 2.20
Definition of direction angles θ_x, θ_y, and θ_z. Direction angles have values between 0° and 180°.

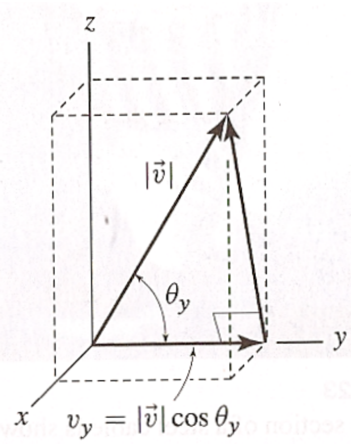


Figure 2.21
Relation between direction angle θ_y and vector component v_y. Similar sketches of triangles using direction angles θ_x and θ_z provide $v_x = |\vec{v}|\cos\theta_x$ and $v_z = |\vec{v}|\cos\theta_z$.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v\cos\theta_x\,\vec{i} + v\cos\theta_y\,\vec{j} + v\cos\theta_z\,\vec{k} = v\left(\cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}\right)$$
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

3. Obtenir un scalaire à partir de deux vecteurs : le produit scalaire

- ***Définition***

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A \times B \times \cos\theta \quad \text{avec } \theta \in [0, \pi] \quad \text{si } \vec{A} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{B} \neq \vec{0}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \quad \text{si } \vec{A} = \vec{0} \text{ ou } \vec{B} = \vec{0} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}$$

En terme de composantes cartésiennes: $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

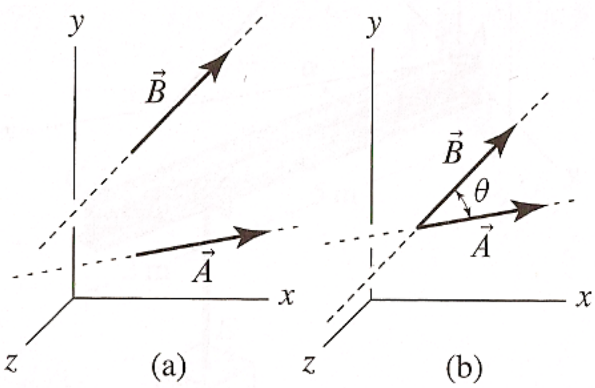
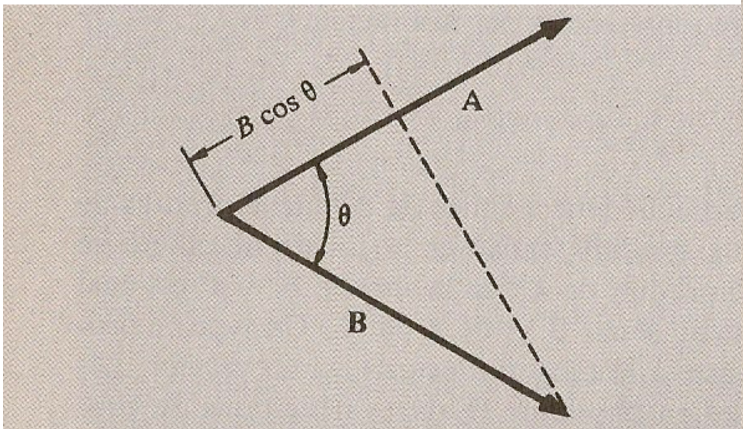
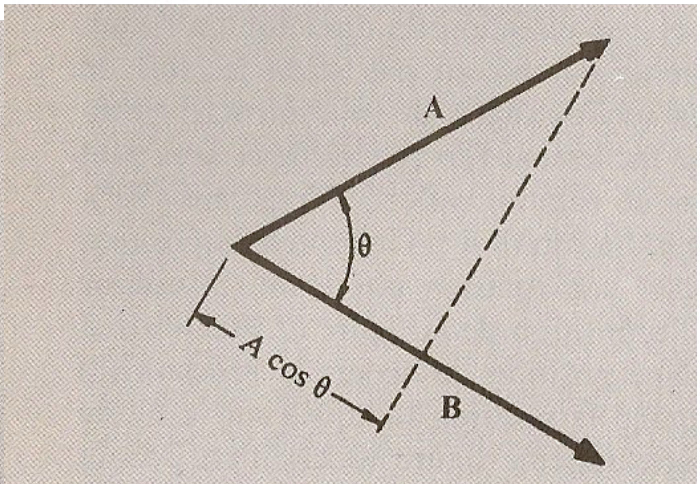


Figure 2.27
(a) Vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ in three dimensions. (b) To evaluate the dot product, the vectors are arranged tail to tail to define angle θ, which is measured in the plane containing the two vectors.



$A(B \cos \theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Ici θ, la lettre grecque thêta, représente l'angle entre **A** et **B**.



$B(A \cos \theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

- ***Propriétés du produit scalaire***

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$$ commutativité

$$s\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)=\left(s\vec{A}\right)\bullet\vec{B}=\vec{A}\bullet\left(s\vec{B}\right)$$ associativité par rapport à la multiplication d'un scalaire

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\bullet\vec{C}=\vec{A}\bullet\vec{C}+\vec{B}\bullet\vec{C}$$ distributivité par rapport à l'addition des vecteurs

- ***Détermination de la composante d'un vecteur dans une direction particulière : projection d'un vecteur***

$$F_{\parallel}=F\times\cos\theta=\vec{F}\bullet\frac{\vec{r}}{r}\quad\left(\text{projection de } \vec{F} \text{ sur } \vec{r}\right)$$

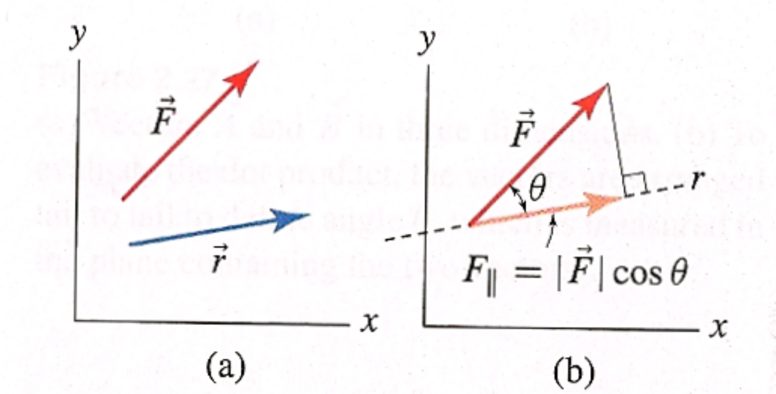
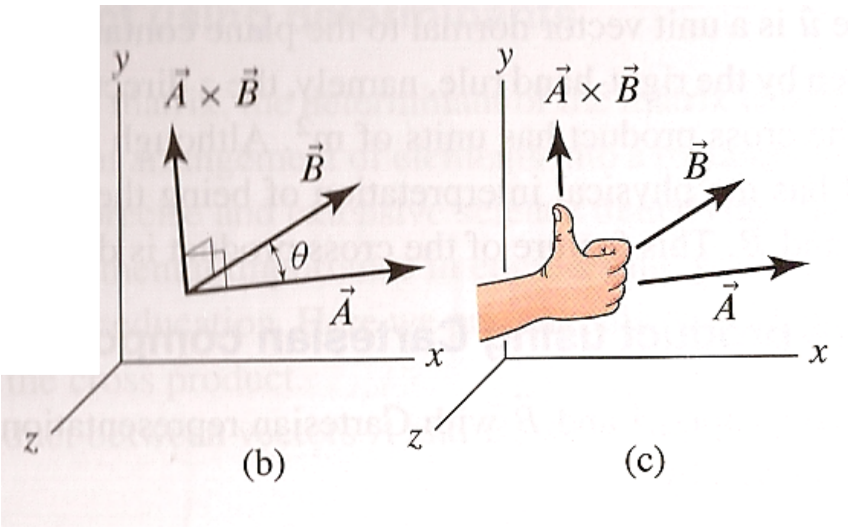


Figure 2.29
Use of basic trigonometry to determine the component of $\vec{F}$ acting in the direction of $\vec{r}$.

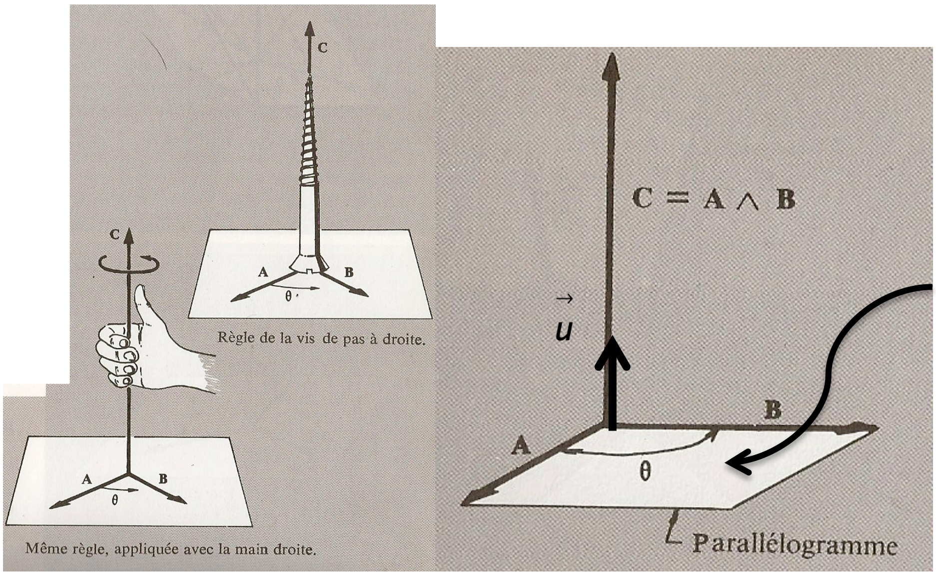
4. Obtenir un vecteur à partir de deux vecteurs : le produit vectoriel

- ***Définition***



$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \left(A\times B\times\sin\theta\right)\vec{u} \quad \text{avec } \theta\in\left[0,\pi\right]$$

$\vec{u}$ vecteur unitaire normal au plan contenant $\vec{A}$ et $\vec{B}$ selon la règle de la main droite



$$\text{surface} = \left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|$$

- ***Propriétés du produit vectoriel***

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A} \quad \text{anticommutativité}$$

$$s\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(s\vec{A}\right)\wedge\vec{B} = \vec{A}\wedge\left(s\vec{B}\right) \quad \text{associativité par rapport à la multiplication d'un scalaire}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\wedge\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{C}+\vec{B}\wedge\vec{C} \quad \text{distributivité par rapport à l'addition des vecteurs}$$

- ***Expression du produit scalaire en utilisant les coordonnées cartésiennes***

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

Technique pour retrouver ce résultat :